

Όνομα:

Επίθετο:

Ημερομηνία: 7/7/2023

Πρωί:

X

Απόγευμα:

Θεματική ενότητα: Αρχές Αναλογιστικής Προτυποποίησης, Κατασκευή και Αξιολόγηση Αναλογιστικών Προτύπων (Αβ)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

Ο αριθμός των ατυχημάτων που θα προκαλέσει ένας ασφαλισμένος μέσα στο επόμενο ασφαλιστικό έτος ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με μέση τιμή λ . Η λ είναι τ.μ. με σ.π.π την παρακάτω:

$$f(x) = \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 e^{-\frac{\lambda}{2}}, \quad \lambda > 0.$$

Να βρεθεί η πιθανότητα για έναν ασφαλισμένο να προκαλέσει 2 ατυχήματα μέσα στο επόμενο ασφαλιστικό έτος.

- (A) Λιγότερο από 0,01
- (B) Τουλάχιστον 0,01 αλλά λιγότερο από 0,05
- (Γ) Τουλάχιστον 0,05 αλλά λιγότερο από 0,10
- (Δ) Τουλάχιστον 0,10 αλλά λιγότερο από 0,15
- (E) Τουλάχιστον 0,15

Θέμα 2

Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Να υπολογιστεί η $E(X|X \geq 0)$.

- (A) 0
- (B) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
- (Γ) $\frac{1}{2}$
- (Δ) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
- (E) $\sqrt{2\pi}$

Θέμα 3

Ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων αποτελείται από δύο κλάσεις την A και την B . Για κάθε μεμονωμένο κίνδυνο και στις δύο κλάσεις, ο αριθμός των αποζημιώσεων ακολουθεί την κατανομή *Poisson*.

Κλάση	Αριθμός Κινδύνων	Κατανομή της συχνότητας των αποζημιώσεων	
		Μέσος	Τυπική Απόκλιση
A	500	0,05	0,227
B	500	0,21	0,561
Σύνολο	1000		

Να υπολογιστεί η διασπορά της συχνότητας των αποζημιώσεων για το συνολικό χαρτοφυλάκιο.

- (A) Λιγότερο από 0,390
- (B) Τουλάχιστον 0,390 αλλά λιγότερο από 0,410
- (Γ) Τουλάχιστον 0,410 αλλά λιγότερο από 0,430
- (Δ) Τουλάχιστον 0,430 αλλά λιγότερο από 0,450
- (E) Τουλάχιστον 0,450

Θέμα 4

Ασφαλιστική εταιρεία γενικών ασφαλίσεων έχει στα μητρώα της το παρακάτω δείγμα αποζημιώσεων:

125 150 165 175 250

Για το χαρτοφυλάκιο αυτό, αποζημιώσεις οι οποίες είναι μικρότερες των 100 νομισματικών μονάδων δεν αναγγέλλονται στην εταιρεία.

Υποθέτετε πως όλες οι αποζημιώσεις (αναγγελθείσες ή μη) προέρχονται από την εκθετική κατανομή. Να εκτιμηθεί η μέση τιμή της κατανομής χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ελάχιστης πιθανοφάνειας.

- (A) 73 (B) 100 (Γ) 125 (Δ) 156 (E) 173

Θέμα 5

Δίνονται τα παρακάτω:

- Οι αποζημιώσεις ακολουθούν την κατανομή $F(X) = \frac{(x/\theta)^\gamma}{1+(x/\theta)^\gamma}$
- Ένα δείγμα αποζημιώσεων:

1035 80 86 90 120 158 180 200 210 1500

Να εκτιμηθεί η παράμετρος θ , με τη μέθοδο της αντιστοίχισης εκατοστημορίων, χρησιμοποιώντας το 40^ο και το 80^ο εμπειρικό εξομαλυμένο εκατοστημόριο.

- (Α) Λιγότερο από 77
(Β) Τουλάχιστον 77 αλλά λιγότερο από 87
(Γ) Τουλάχιστον 87 αλλά λιγότερο από 97
(Δ) Τουλάχιστον 97 αλλά λιγότερο από 107
(Ε) Τουλάχιστον 107

Θέμα 6

Αν L είναι η μέγιστη σφρευτική απώλεια για κίνδυνο $X \sim \text{Exp}(\beta)$, ο λόγος $\frac{E(L^2)}{(E(L))^2}$ είναι ανεξάρτητος της κατανομής του κινδύνου. Ποια η τιμή του $\frac{E(L^2)}{(E(L))^2}$;

- (Α) 2
(Β) $1 + \theta$
(Γ) $\theta(1 + \theta)$
(Δ) $1 + 2\theta$
(Ε) $2 + 2\theta$

Θέμα 7

Έστω X τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια τη συνάρτηση:

$$M(t) = \left(\frac{2 + e^t}{3}\right)^9, \quad -\infty < t < \infty$$

Να υπολογιστεί η διακύμανση της τ.μ. X .

- (A) 2 (B) 3 (Γ) 8 (Δ) 9 (E) 11

Θέμα 8

Αν για $X \sim \text{Exp}(\beta)$, η τιμή θ_1 του περιθωρίου ασφαλείας ($\theta_1 < 1$) επιτυγχάνει συντελεστή προσαρμογής R_1 , ποια τιμή του θ απαιτείται για να επιτευχθεί διπλασιασμός του συντελεστή;

- (A) $\frac{1}{1-\theta_1}$ (B) $\frac{2\theta_1}{1-\theta_1}$ (Γ) $\frac{\theta_1}{1-\theta_1}$ (Δ) $2\theta_1$ (E) $\frac{2}{1-\theta_1}$

Θέμα 9

Δίνεται η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής L_1 :

$$M_{L_1}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$$

Εάν X είναι το αντίστοιχο ύψος αποζημίωσης, με τι είναι ίσος ο λόγος $\frac{E(X^k)}{E(X)}$ με $k = 1, 2, \dots$;

- (A) a_k (B) a_{k-1} (Γ) $\frac{k!}{a_k}$ (Δ) $k! a_k$ (E) $k! a_{k-1}$

Θέμα 10

Δίνεται σύνθετη *Poisson* διαδικασία S με $\lambda = 10$ και $p(1) = \frac{4}{10}$, $p(2) = \frac{3}{10}$, $p(3) = \frac{2}{10}$ και $p(4) = \frac{1}{10}$. Να βρεθεί η $f_S(4)$.

- (A) $\frac{198}{3}e^{-10}$
- (B) $\frac{198}{6}e^{-10}$
- (Γ) $\frac{289}{3}e^{-10}$
- (Δ) $\frac{289}{6}e^{-10}$
- (E) $\frac{296}{6}e^{-10}$

Θέμα 11

Οι αποζημιώσεις έχουν σ.π.π την $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{3}x}$, $x > 0$ και το περιθώριο ασφαλείας ισούται με $\theta = 1/2$.

Να βρεθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(1)$.

- (A) Λιγότερο από 45%
- (B) Τουλάχιστον 45% αλλά λιγότερο από 50%
- (Γ) Τουλάχιστον 50% αλλά λιγότερο από 55%
- (Δ) Τουλάχιστον 55% αλλά λιγότερο από 60%
- (E) Τουλάχιστον 60%

Θέμα 12

Έστω σύνθετη διαδικασία S με $Pr(N = n) = \binom{n+2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ και $Pr(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Να βρεθούν η διασπορά $Var(S)$ και η ροπογεννήτρια $M_S(t)$.

	$Var(S)$	$M_S(t)$
(A)	6	$\left(\frac{2-e^t}{3-2e^t}\right)^3$
(B)	12	$\left(\frac{2-e^t}{3-2e^t}\right)^3$
(Γ)	6	$\left(\frac{2-e^t}{4-3e^t}\right)^3$
(Δ)	12	$\left(\frac{2-e^t}{4-3e^t}\right)^3$
(E)	6	$\left(\frac{e^t(2-e^t)}{3-2e^t}\right)^3$

Θέμα 13

Ο αναλογιστής μιας ασφαλιστικής εταιρείας γενικών ασφαλίσεων μελετάει ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο ζημιών του κλάδου αστικής ευθύνης αυτοκινήτων. Έχει καταλήξει ότι οι ζημιές ακολουθούν την κατανομή *Pareto* με παραμέτρους $\alpha = 2,5$ και $\theta = 300$. Ο αναλογιστής θέλει να εφαρμόσει απαλλαγή (*deductible*) τέτοια ώστε το 25% των ζημιών να έχει μηδενικό κόστος για την ασφαλιστική εταιρεία.

Να υπολογιστεί το ύψος της απαλλαγής.

- (A) Λιγότερο από 10
- (B) Τουλάχιστον 10 αλλά λιγότερο από 20
- (Γ) Τουλάχιστον 20 αλλά λιγότερο από 30
- (Δ) Τουλάχιστον 30 αλλά λιγότερο από 40
- (E) Τουλάχιστον 40

Θέμα 14

Η συνάρτηση κατανομής για την τυχαία μεταβλητή X είναι η:

$$F(X) = 1 - e^{-2x}(x^2 + x + 1) \quad x > 0$$

Να βρεθεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X - d | X > d]$.

- (A) $\frac{d}{d^2+d+1}$
- (B) $\frac{d^2+1}{2(d^2+d+1)}$
- (Γ) $\frac{1}{2(d^2+d+1)}$
- (Δ) $\frac{\frac{1}{2}d^2+d+1}{d^2+d+1}$
- (E) $\frac{d+1}{d^2+d+1}$

Θέμα 15

Δίνεται ότι:

- Το ύψος των αποζημιώσεων ακολουθεί κατανομή Pareto με παραμέτρους $\theta=0,5$ και $\alpha=5$
- Το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο 2
- Το πλήθος και το ύψος των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητα
- Το παρατηρούμενο ασφάλιστρο κινδύνου θα πρέπει να μην αποκλίνει από το αναμενόμενο περισσότερο από 2% για το 90% των περιπτώσεων
- $z_{\alpha/2} = 1,645$

Υπολογίστε το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων που απαιτούνται για πλήρη αξιοπιστία.

- (A) Λιγότερο από 7000
- (B) Τουλάχιστον 7000 και λιγότερο από 10000
- (Γ) Τουλάχιστον 10000 και λιγότερο από 13000
- (Δ) Τουλάχιστον 13000 και λιγότερο από 16000
- (E) Τουλάχιστον 16000

Θέμα 16

Δίνεται ότι για χαρτοφυλάκιο ασφαλίσεων απαιτούνται 2000 αποζημιώσεις για την επίτευξη πλήρους αξιοπιστίας κάτω από τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- Το συνολικό πλήθος των αποζημιώσεων δεν αποκλίνει από το αναμενόμενο περισσότερο από 3% με πιθανότητα p .
- Το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί κατανομή Poisson.
- Η απαίτηση τροποποιείται ώστε το οι συνολικές αποζημιώσεις να μην αποκλίνουν από το αναμενόμενο περισσότερο από 5% με πιθανότητα p .
- Το ύψος των αποζημιώσεων ακολουθεί κατανομή με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{10000}$, $0 < x < 10000$.

Υπολογίστε το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων που τελικά απαιτούνται για πλήρη αξιοπιστία.

- (A) 720
- (B) 960
- (Γ) 2.160
- (Δ) 2.667
- (E) 2.880

Θέμα 17

Δίνεται ότι:

- Το πλήθος των ετήσιων αποζημιώσεων για έναν ασφαλισμένο ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο λ
- Η πρότερη κατανομή της λ είναι Gamma με παραμέτρους $n=1$ και $\beta = 1/1,2$
- Το πρώτο έτος παρατηρούνται τρεις ζημιές ενώ το δεύτερο έτος καμία.

Χρησιμοποιώντας την θεωρία αξιοπιστίας κατά Bühlmann υπολογίστε το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων του τρίτου έτους.

- (A) 1,30
(B) 1,32
(Γ) 1,38
(Δ) 1,41
(E) 1,46

Θέμα 18

Ασφαλιστική εταιρία διατηρεί στοιχεία για αποζημιώσεις τεσσάρων πελατών για περίοδο επτά ετών. Οι αποζημιώσεις που προκύπτουν από τον πελάτη i στο έτος j έστω ότι είναι X_{ij} .

Δίνεται ότι

- $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^7 (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = 33,60$
- $\sum_{i=1}^4 (\bar{X}_i - \bar{X})^2 = 3,30$

Με χρήση του προτύπου Bühlmann ο συντελεστής αξιοπιστίας Z εκτιμάται ότι είναι:

- (A) Λιγότερο από 74%
(B) Τουλάχιστον 74% και λιγότερο από 77%
(Γ) Τουλάχιστον 77% και λιγότερο από 80%
(Δ) Τουλάχιστον 80% και λιγότερο από 83%
(E) Τουλάχιστον 83%

Θέμα 19

Δίνεται ότι:

- Η ετήσια συχνότητα για ασφαλισμένο ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο λ
- λ ακολουθεί κατανομή Gamma με παραμέτρους n και β
- Ο πρώτος αναλογιστής υποθέτει ότι $n = 1$ και $\beta = 6$
- Δεύτερος αναλογιστής υποθέτει τον ίδιο μέσο της Gamma αλλά την μισή διασπορά
- Σε περίοδο τριών ετών παρατηρείται συνολικά μία αποζημίωση
- Και οι δύο αναλογιστές χρησιμοποιούν θεωρία Bayes για να εκτιμήσουν το αναμενόμενο πλήθος αποζημιώσεων της επόμενης χρονιάς με βάση τις υποθέσεις τους

Υπολογίστε το κλάσμα που δείχνει την εκτίμηση του πρώτου αναλογιστή προς εκείνη του δεύτερου.

- (A) $3/4$
- (B) $9/11$
- (Γ) $10/9$
- (Δ) $11/9$
- (E) $4/3$

Θέμα 20

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

		Κατανομή Πλήθους Αποζημιώσεων				
Κατηγορία	Ασφαλισμένοι	0	1	2	3	4
1	3000	1/3	1/3	1/3	0	0
2	2000	0		2/3	1/6	0
3	1000	0	0	1/6	2/3	1/6

Ένας τυχαία επιλεγμένος ασφαλισμένος έχει ένα συμβάν το πρώτο έτος. Με χρήση της θεωρίας του Bayes ποιο το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων στο δεύτερο έτος για τον ίδιο ασφαλισμένο.

- (A) 1
- (B) 1,15
- (Γ) 1,17
- (Δ) 1,20
- (E) 1,25

Θέμα 21

Χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιουσίας αποτελείται από 6 συμβόλαια με ασφαλισμένα κεφάλαια:

Συμβόλαιο	Ασφαλισμένο Κεφάλαιο
A	155.200
B	170.000
Γ	220.000
Δ	550.000
E	650.000
ΣΤ	700.000

Η εταιρία (X) αντασφαλίζει το χαρτοφυλάκιο με αναλογική κάλυψη υπερβάλλοντος κεφαλαίου με ίδια κράτηση (1o Line) να τοποθετείται στα 115.000 και ανώτατο όριο ευθύνης του αντασφαλιστή (Y) 15 Lines. Οι αποζημιώσεις πραγματοποιήθηκαν ως εξής :

Συμβόλαιο	Αποζημίωση
A	77.870
B	87.350
Γ	165.980
Δ	435.670
E	345.876
ΣΤ	548.888

Εκτιμήστε το συνολικό ποσό ίδιας κράτησης και το συνολικό ποσό που εκχωρείται στην εταιρία Y αντίστοιχα.

(A) 214.567 και 1.447.069

(B) 266.063 και 1.395.571

(Γ) 329.918 και 1.331.716

(Δ) 409.099 και 1.252.536

(E) 446.015 και 1.215.619

Θέμα 22

Το πλήθος των αποζημιώσεων σε χαρτοφυλάκιο γενικών ασφαλίσεων χαρακτηρίζεται από διαδικασία Poisson και κάθε χρόνο αναμένονται κατά μέσο όρο 3,8 ζημιές. Το ύψος κατανέμεται ως εξής:

$\Pr(X=1)$	$\Pr(X=2)$	$\Pr(X=3)$	$\Pr(X=4)$
40%	30%	25%	5%

Η ασφαλιστική εταιρία αντασφαλίζεται με μη αναλογική κάλυψη υπερβάλλουσας ζημιάς με ίδια κράτηση 1. Η αναμενομένη τιμή καθώς και τη διασπορά της συνολικής αποζημίωσης του αντασφαλιστή είναι ίση με:

- (A) 1,31 και 2,05
- (B) 1,31 και 4,05
- (Γ) 3,61 και 6,65
- (Δ) 5,61 και 7,13
- (E) 6,91 και 9,05

Θέμα 23

Οι παρακάτω σχέσεις σχετίζονται με τη μη αναλογική κάλυψη υπερβάλλουσας ζημιάς.

Ποια από τις παρακάτω είναι λάθος;

- 1) $\text{Var}(\bar{N}) - E(\bar{N}) \leq \text{Var}(N) - E(N)$
- 2) $E(\bar{S}) = E(\bar{N}) * E(\bar{X})$
- 3) $\text{Vcov}(\bar{S}) < \text{Vcov}(\bar{S})$
- 4) $\text{Vcov}(\bar{X}) > \text{Vcov}(X)$

- (A) Καμία
- (B) Μόνο η 2
- (Γ) Η 2 και η 4
- (Δ) Μόνο η 4
- (E) Όλες

Θέμα 24

Δίνονται:

- Σύνθετη Poisson (λ) με μέσο 5 και το ύψος των αποζημιώσεων να ακολουθεί την εξής κατανομή:

x	$f_x(x)$
5	0,6
k	0,4

- $\kappa > 5$.
- Το αναμενόμενο κόστος μίας stop loss ανταφαλιστικής σύμβασης με απαλλαγή ύψους 5 είναι 28,03.

Υπολογίστε το κ

- (A) 5
- (B) 6
- (Γ) 7
- (Δ) 8
- (E) 9