ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**			
Ημερομηνία: 7/7/2023	**Πρωί:**		**Απόγευμα:**	**X**
Θεματική ενότητα: Αρχές Αναλογιστικής Προτυποποίησης, Κατασκευή και Αξιολόγηση Αναλογιστικών Προτύπων (Αβ)				

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

α) Ο αρχικός μισθός ενός αναλογιστή μοντελοποιείται από μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f(y,\lambda) = \frac{27}{2}\mu^{-3}y^2e^{-\frac{3y}{\mu}}$.

(i) Να δειχτεί ότι η μέση τιμή της κατανομής ισούται με μ.

(1 μονάδα)

(ii) Να δειχθεί ότι η παραπάνω συνάρτηση πυκνότητάς μπορεί να γραφεί στη μορφή της εκθετικής οικογένειας κατανομών και να βρεθεί η φυσική παράμετρος.

(2 μονάδες)

(iii) Δίνεται το μοντέλο:

$$g(\mu) = \alpha + \beta x$$

όπου $x = 1$ εάν ο νέος υπάλληλος έχει περάσει τουλάχιστον τρία μαθήματα της ένωσης αναλογιστών και $x = 0$ σε διαφορετική περίπτωση, α και β είναι παράμετροι και $g(\cdot)$ είναι η κανονική συνδετική συνάρτηση. Δίνονται επίσης και δεδομένα για το ζεύγος των μεταβλητών (x, y) για 20 άτομα που προσελήφθησαν σε αναλογιστικές θέσεις το έτος 2022. Να βρεθεί ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την παράμετρο β συναρτήσει των x_i και y_i.

(4 μονάδες)

β) Δίνονται στον παρακάτω πίνακα οι σωρευτικές πληρωθείσες αποζημιώσεις (cumulative paid claims) από ένα χαρτοφυλάκιο συμβολαίων γενικών κλάδων (ποσά σε χιλ. €) :

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης				Τελικό Κόστος
	0	1	2	3	
2019	342	429	458	471	490
2020	481	685	701		
2021	584	800			
2022	665				

Δίνεται επίσης για το ίδιο χαρτοφυλάκιο, ο αριθμός των αναγγελθεισών ζημιών ανά έτος ατυχήματος:

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης				Τελικός Αριθμός
	0	1	2	3	
2019	41	46	48	49	50
2020	45	51	53		
2021	50	56			
2022	54				

(i) Να υπολογιστεί ο τελικός αριθμός των ζημιών, για κάθε έτος ατυχήματος, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο $chain\ ladder$.

(1 μονάδα)

(ii) Να υπολογιστεί το τελικό μέσο κόστος των αποζημιώσεων, για κάθε έτος ατυχήματος, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο $chain\ ladder$.

(1 μονάδα)

(iii) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το (i) και (ii), να υπολογιστεί το συνολικό απόθεμα.

(1 μονάδα)

Θέμα 2

α) Οι αποζημιώσεις ενός χαρτοφυλακίου σε χιλ. ευρώ έχουν ύψη: 35, 111, 201, 309, 442, 617, 843, 1330, 2368 και 4685.

(i) Υποθέτοντας ότι οι ζημιές προέρχονται από $lognormal$ κατανομή με παραμέτρους μ και σ, να βρεθούν οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας για αυτές τις παραμέτρους.

(3 μονάδες)

(ii) Υποθέτοντας ότι οι ζημιές ακολουθούν κατανομή $Pareto$ με παραμέτρους α και λ, να βρεθούν οι εκτιμήσεις των παραμέτρων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ροπών.

(2 μονάδες)

(iii) Εάν εφαρμόζεται απαλλαγή ύψους 3000, να βρεθεί το ποσοστό των ζημιών τις οποίες θα κληθεί να αποζημιώσει η ασφαλιστική εταιρεία και με τα δύο παραπάνω μοντέλα.

(2 μονάδες)

Δίνονται: $\Phi(1{,}309) = 0.9047,\ \Phi(1{,}382) = 0.9165,\ \Phi(1{,}687) = 0.9542$

β) Έστω η τυχαία μεταβλητή S, με:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

όπου N και $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Η N ακολουθεί κατανομή $Poisson$ με μέση τιμή λ και οι $X_1, X_2, X_3, \ldots$ προέρχονται από την κοινή κατανομή $P(x)$ με μέση τιμή m_1, δεύτερη ροπή m_2 και τρίτη ροπή m_3.

(i) Να δειχτεί ότι η κατανομή της τ.μ. S έχει θετική λοξότητα ($skewness$).

(2 μονάδες)

(ii) Εάν $Z = \frac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}}$ να βρεθεί η λοξότητα της Z καθώς το $\lambda \to \infty$.

(1 μονάδα)

Θέμα 3

Ένας κατασκευαστής ελαστικών αυτοκινήτου προσφέρει εγγύηση στους αγοραστές των προϊόντων του. Ο αριθμός των αυτοκινήτων που έχουν αγοράσει την εγγύηση είναι 500. Κάθε αυτοκίνητο από αυτά έχει πιθανότητα p να εμπλακεί σε τροχαίο ατύχημα (ανεξάρτητα μεταξύ τους) και εάν εμπλακεί σε τροχαίο τότε υπάρχει πιθανότητα 0,1 για κάθε λάστιχο (ανεξάρτητα μεταξύ τους) να χρειαστεί αντικατάσταση με κόστος 5 νομισματικές μονάδες. Έστω S η τυχαία μεταβλητή για το συνολικό κόστος αντικατάστασης των ελαστικών σε ένα έτος (υποθέστε ότι κάθε αυτοκίνητο έχει 4 ελαστικά).

(i) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της S.

(3 μονάδες)

(ii) Στη συνέχεια να δειχτεί ότι $E(S) = 1000p$ και $Var(S) = 6500p - 2000p^2$

(3 μονάδες)

Υποθέστε ότι ο εν λόγω κατασκευαστής μοντελοποιεί το κόστος αντικατάστασης των ελαστικών με μια τυχαία μεταβλητή T, βασιζόμενος σε ένα χαρτοφυλάκιο 2000 ελαστικών, κάθε ένα από αυτά (ανεξάρτητα μεταξύ τους) έχει πιθανότητα $0{,}1p$ να αντικατασταθεί.

(iii) Να εξαχθούν οι $E(T)$ και $Var(T)$ συναρτήσει της παραμέτρου p.

(1 μονάδα)

(iv) Υποθέστε ότι $p = 0{,}05$.

a. Να υπολογιστεί ο μέσος και η διασπορά των S και T
b. Χωρίς να υπολογίσετε την πιθανότητα για την S και την T, κάθε μια χωριστά, να ξεπεράσει τις 75 ν.μ., να σχολιάσετε αν αναμένετε η πιθανότητα για την S να είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση από την αντίστοιχη πιθανότητα για την T.

(3 μονάδες)

Θέμα 4

α) Το πλήθος των αποζημιώσεων χαρτοφυλακίου ακολουθεί κατανομή Poisson και αναμένονται 200 συμβάντα μέσα στην επόμενη χρήση. Το ύψος των αποζημιώσεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο 40. Η ασφαλιστική εταιρία υπολογίζει το ασφάλιστρο με τις συνολικές επιβαρύνσεις να ανέρχονται σε 40% και πρέπει να αποφασίσει αν θα συνάψει κάποια από τα παρακάτω σχήματα:

- Χωρίς αντασφάλιση
- Αντασφάλιση excess of loss με ιδία κράτηση 60 με αντασφαλιστή που εκτιμά 55% επιβαρύνσεις στον υπολογισμό του αντασφαλίστρου
- Απλή αναλογική σύμβαση με ιδία κράτηση 75% αντασφαλιστή που εκτιμά 45% επιβαρύνσεις στον υπολογισμό του αντασφαλίστρου

(i) Να βρεθεί το αναμενόμενο κέρδος για την ασφαλιστική εταιρία σε κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές.

(2,5 μονάδες)

(ii) Να υπολογισθεί η διασπορά των συνολικών αποζημιώσεων της ασφαλιστικής εταιρίας

(2,5 μονάδες)

β) Το ύψος της αποζημίωσης για συγκεκριμένο τύπο συμβολαίων ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 150 και τυπική απόκλιση 30. Το πλήθος των αποζημιώσεων για τα ίδια συμβόλαια ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο 0,25. Η ασφαλιστική εταιρία χρησιμοποιεί συνολική επιβάρυνση 70% κατά την διαδικασία τιμολόγησης.

(i) Υπολογίστε το ετήσιο ασφάλιστρο που χρεώνει η ασφαλιστική εταιρία.

(1 μονάδα)

Η ασφαλιστική εταιρία αντασφαλίζεται με μη αναλογική κάλυψη υπερβάλλουσας ζημιάς με ιδία κράτηση 200. Η αντασφαλιστική εταιρία χρησιμοποιεί συνολική επιβάρυνση 120% κατά την διαδικασία τιμολόγησης. Δίνεται Φ (1,667) = 0,95224 και Φ (1,790)= 0,9633.

(ii) Υπολογίστε την πιθανότητα μία αποζημίωση να μην υπερβεί την ιδία κράτηση.

(2 μονάδες)

(iii) Υπολογίστε την πιθανότητα για συγκεκριμένο συμβόλαιο κατά την περίοδο ενός έτους να μην υπάρχουν αποζημιώσεις που να υπερβαίνουν την ιδία κράτηση.

(2 μονάδες)

Θέρα 5

α) Το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί κατανομή Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (m,p). Η παράμετρος p έχει κατανομή με Beta(α, b) και το πλήθος των αποζημιώσεων που παρατηρήθηκαν σε λ περιόδους είναι $n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ αντίστοιχα.

(i) Να δείξετε ότι η Διωνυμική κατανομή ανήκει στην εκθετική οικογένεια.

(1 μονάδα)

(ii) Να δείξετε ότι η εκτίμηση κατά Bayes για την ύστερη κατανομή της p με χρήση προσέγγισης είναι Beta.

(2 μονάδες)

(iii) Να δείξετε την εκτίμηση για το ασφάλιστρο της επόμενης χρησης με τη μέθοδο Bayes.

(2 μονάδες)

(iv) Να δείξετε ότι η εκτίμηση κατά Bühlmann για το ασφάλιστρο της επόμενης χρήσης είναι ίση με $\mathrm{m}\frac{\mathrm{a}+\sum_1^{\lambda} n_k}{\mathrm{a}+\mathrm{b}+\lambda\mathrm{m}}$

(2 μονάδες)

β) Η κατανομή της τ.μ. X είναι εκθετική με μέση τιμή λ και σ.π.π. $\mathrm{X}\sim\mathrm{Exponential}\ (\lambda) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{x}}$.

Η πρότερη κατανομή της παραμέτρου λ είναι επίσης εκθετική με μέση τιμή 1.

(i) Να βρείτε την περιθώρια κατανομή $\mathrm{f_X(x)}$ της τμ X.

(2 μονάδες)

(ii) Να υπολογίσετε την σ.π.π. της ύστερης κατανομής του λ, αν δοθεί μια μοναδική παρατηρηθείσα τιμή x.

(1 μονάδα)