

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ  
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ 2012**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΕΩΝ  
6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2012**

**ΑΠΟΓΕΥΜΑΤΙΝΗ ΕΞΕΤΑΣΗ (12 μ. – 2 μ.μ.)**

1. (6 βαθμοί) Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει 2 ασφαλιστήρια συμβόλαια A και B.  $X_1$  είναι το ύψος των ζημιών που προκύπτουν από το συμβόλαιο A και  $X_2$  είναι το ύψος των ζημιών που προκύπτουν από το συμβόλαιο B. Επιπλέον,  $g(x_1, x_2/b) = b^2 e^{-b(x_1+x_2)}$ , όπου  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  και η παράμετρος  $b$  είναι τυχαία μεταβλητή με σ.π.π.  $f(b) = e^{-b}$ ,  $b > 0$ .

- (i) (3 βαθμοί) Να υπολογισθεί η πιθανότητα η συνολική ζημιά της εταιρείας (και από τα δύο συμβόλαια) να μην ξεπεράσει το 4.
- (ii) (3 βαθμοί) Να βρεθεί η πιθανότητα η παράμετρος  $b$  να πάρει τιμή μικρότερη του 1, δεδομένου ότι παρατηρείται  $X_1 = 1$  και  $X_2 = 4$

2. (4 βαθμοί) (i) (2 βαθμοί) Περιγράψτε τις βασικές υποθέσεις της μεθόδου Chain Ladder και προτείνετε τρόπους διόρθωσης της μεθόδου όταν αυτές παραβιάζονται.  
 (ii) (2 βαθμοί) Ασφαλιστική εταιρεία έχει συνάψει το τελευταίο έτος απλή αναλογική αντασφαλιστική σύμβαση με ασφαλιστική εταιρεία B. Μέσω της σύμβασης αυτής η εταιρεία A έχει αναλάβει να καλύπτει το 70% του κόστους των ζημιών πυρός κατοικίας της εταιρείας B (αντασφαλιστική ανάληψη). Κατά την εκτίμηση των αποθεμάτων εκκρεμών ζημιών, η εταιρεία A έχει συμπεριλάβει τις ζημιές που προέρχονται από αντασφαλιστικές αναλήψεις στα τρίγωνα των ζημιών της. Τα ποσά των ζημιών είναι οργανωμένα ανά έτος ατυχήματος στα σχετικά τρίγωνα. α. Ποιες επιφυλάξεις πρέπει να διατυπωθούν για την εκτίμηση του αποθέματος εκκρεμών ζημιών με εφαρμογή της μεθόδου Chain Ladder; β. Πως διαφοροποιείται η απάντηση στο (ii) α αν η αντασφαλιστική ανάληψη αφορά σε σύμβαση υπερβάλλοντος ζημιάς (XoL);

3. (8 βαθμοί) Έστω ότι  $X / \theta \sim Uniform(0, \theta)$ .

(i) (3 βαθμοί) Να βρεθεί ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την παράμετρο  $\theta$ , δεδομένου ότι παρατηρείται τυχαίο δείγμα  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

(ii) (2 βαθμοί) Αν επιπλέον  $\theta \sim f(\theta / a, 3) = \frac{a \cdot 3^a}{\theta^{a+1}}$ ,  $\theta \geq 3$  και παρατηρείται  $x = 5$ , να δείξετε ότι  $f(x) = \frac{a \cdot 3^a}{(a+1) \cdot 5^{a+1}}$ .

(iii) (3 βαθμοί) Αν  $\theta \sim f(\theta / a, x_0) = \frac{a \cdot x_0^a}{\theta^{a+1}}$ ,  $\theta \geq x_0, x_0 \geq 0, a > 0$ , να βρείτε την

ύστερη κατανομή του  $\theta$  δεδομένου ότι παρατηρείται δείγμα  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

4. (8 βαθμοί) (i) (2 βαθμοί) Έστω ότι οι ζημιές ακολουθούν κανονική κατανομή με σταθερή διασπορά. Να δείξετε ότι για την εφαρμογή γενικευμένου γραμμικού μοντέλου, ο κανονικός μετασχηματισμός είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

(ii) (6 βαθμοί) Οι αποζημιώσεις δίνονται σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα.

	Ηλικ. ομάδα A	Ηλικ. ομάδα B
Περιοχή A	950	800
Περιοχή B	750	650

Αν θεωρηθεί ότι οι αποζημιώσεις  $Y$  ακολουθούν κανονική κατανομή, ζητείται να εφαρμοστεί γενικευμένο γραμμικό πρότυπο  $E(Y) = \mu = g^{-1}(X\beta)$  με ταυτοτικό μετασχηματισμό, να εκτιμηθεί η παράμετρος  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$  και να προταθεί το ασφάλιστρο που σύμφωνα με τη μέθοδο θα πρέπει να χρεωθεί σε κάθε υποομάδα.

5. (8 βαθμοί) Οι προσαυξητικές πληρωμές  $X_{ij}$ , όπου  $i$  το έτος ατυχήματος και  $j$  το έτος εξέλιξης, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

Έτος ατυχ.	Έτος Εξέλιξης		
	0	1	2
2010	10	24	34
2011	12	28	
2012	13		

Αν εφαρμοστεί το πρότυπο  $\ln(X_{ij}) = a + b \cdot j^2 + \varepsilon$ , όπου  $a, b$  παράμετροι και  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 = 0,10757)$

(i) (3 βαθμοί) Να εκτιμηθεί το διάνυσμα των παραμέτρων  $(a, b)$

(ii) (5 βαθμοί) Εάν  $Y_f = \begin{pmatrix} 3,70484 \\ 2,89818 \\ 3,70484 \end{pmatrix}$  να υπολογιστεί το απόθεμα που πρέπει να

κρατήσει η ασφαλιστική εταιρεία για τις ζημιές του 2012 και η σχετική τυπική απόκλιση.

6. (6 βαθμοί) Δίνονται τα ακόλουθα δεδομένα

Έτος Απυχ.	Κόστος ζημιών την 30/6/2010	ΔΑ	Βάρη
2008	25.000	52.000	45%
2009	23.000	80.000	65%

Ημερομηνία	Αύξηση τιμολογίου
1/7/2008	2%
1/7/2009	5%
1/7/2010	3%

Όλα τα συμβόλαια είναι ετήσια. Το νέο τιμολόγιο θα ισχύσει 1/7/2011- 1/7/2012. Ο πληθωρισμός εκτιμάται σε 5% σε όλες τις σχετικές περιόδους. Ο δείκτης εξόδων (expense ratio) δίνεται 20%. Οι λόγοι εξέλιξης έχουν ως εξής:

Μήνες	Λόγοι <u>εξέλιξης</u>
6/Ult	3,8
12/Ult	2,6
18/Ult	2,1
24/Ult	1,8
30/Ult	1,5

Ποια είναι η προτεινόμενη τιμολογιακή αύξηση (indicated rate change);

7. (4 βαθμοί) Ο κίνδυνος κατανέμεται ομοιόμορφα στο (0, 8.000) και το πλήθος των ζημιών ακολουθεί Poisson παραμέτρου 1.000.

(i) (2 βαθμοί) Να υπολογιστούν οι συνολικές αναμενόμενες αποζημιώσεις E(S) και η σχετική διασπορά V(S).

(ii) (2 βαθμοί) Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει συνάψει αντασφαλιστική σύμβαση υπερβάλλοντος ζημιάς (XoL) με ίδια κράτηση 2.000 και όριο ευθύνης του αντασφαλιστή 4.000. Επιπλέον των ανωτέρω, η σύμβαση προβλέπει μια δωρεάν επαναφορά (free reinstatement) και ετήσια απαλλαγή (annual aggregate deductible) 500. Τι θα πληρώσει ο αντασφαλιστής για κάθε μία από τις ακόλουθες ζημιές;

Ζημιά	Κόστος
1	1.000
2	3.000
3	5.000
4	6.000
5	5.000
6	2.000

8. (6 βαθμοί) Δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες

Συσσωρευμένες πληρωθείσες ζημιές				
Έτος Ατυχ.	0	1	2	3
2008	1500	1750	1990	2000
2009	1600	1800	1900	
2010	1560	1780		
2011	1590			

Επιπλέον στο έτος εξέλιξης 0 εμφανίζεται η εξής εικόνα ζημιών

Έτος Ατυχ.	Πληρωμές σε κλειστές ζημιές / Πλήθος κλειστών	Κόστος ζημιών που παραμένουν εικρεμείς/ Πλήθος εικρεμών
2008	93,75	103,13
2009	94,12	103,53
2010	94,00	115,00
2011	95,39	104,93

- (I) (4 βαθμοί) Αν γίνει υπόθεση ότι ο πληθωρισμός του παρελθόντος ήταν 2% σε όλες τις σχετικές περιόδους, και ότι ο πληθωρισμός του μέλλοντος θα είναι 5% ετησίως, να γίνει εκτίμηση των αποθεμάτων στην 31.12.2011, κάνοντας τις απαραίτητες διορθώσεις για την μεταβολή του πληθωρισμού.
- (II) (2 βαθμοί) Θεωρείτε ότι τα αποθέματα που υπολογίστηκαν στο πρώτο ερώτημα είναι υπερεκτιμημένα; Σχολιάστε.