



Όνομα:	Επίθετο:		
Ημερομηνία: 17/02/2017	Πρωί:		Απόγευμα: x
Θεματική ενότητα: Αναλογιστικά Πρότυπα Επιβίωσης			

### Άσκηση 1

Η συνάρτηση επιβίωσης δίνεται  $S(t) = 1/(1 + (at)^\eta)$ ,  $t \geq 0$ , όπου  $a > 0$ ,  $\eta > 0$  παράμετροι.

- Να υπολογίσετε την συνάρτηση κινδύνου
- Να υπολογίσετε την συνάρτηση πυκνότητας
- Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $\eta$  για τις οποίες η συνάρτηση κινδύνου είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου.
- Να υπολογίσετε την διάμεσο της  $S(t)$ .

### Άσκηση 2

Σε μια μελέτη θνησιμότητας με βάση ένα δείγμα  $n$  προσώπων στο διάστημα  $(x, x + 1]$  μπορείτε να παρατηρήσετε κάθε ένα από τα πρόσωπα αυτά στο υπο-διάστημα  $(x + a_i, x + b_i)$ ,  $0 \leq a_i < b_i \leq 1$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Υποθέτουμε ότι οι θάνατοι στο διάστημα  $(x, x + 1]$  είναι ομοιόμορφα κατανομημένοι στο διάστημα αυτό.

- Να εξετάσετε εάν η υπόθεση για ομοιόμορφη κατανομή των θανάτων οδηγεί σε αυξανόμενη ένταση θνησιμότητας.
- Ξεκινώντας από την κλασματική πιθανότητα θανάτου  ${}_b q_x$  να δείξετε ότι

$${}_{b_i - a_i} q_{x + a_i} = \frac{(b_i - a_i) q_x}{1 - a_i q_x}$$

- Να υπολογίσετε την ηλικία όπου ο κεντρικός ρυθμός θανάτου  $m_x$  ισούται με την ένταση θνησιμότητας όταν ισχύει η υπόθεση ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων.



### Άσκηση 3

3Α. Σε ένα πρόσφατο άρθρο μιας εφημερίδας αναφέρθηκε ότι ο ετήσιος αριθμός κρουσμάτων μιας ασθένειας μειώθηκε στην χώρα μας κατά τουλάχιστον 13% από το 2002 έως το 2003. Ως ένας φοιτητής ο οποίος έχει μόλις ολοκληρώσει μια πορεία στατιστικών σπουδών, βρίσκετε τα δεδομένα για τα έτη 1998-2007 και αποφασίζετε να ελέγξετε κατά πόσο αληθεύει το συγκεκριμένο άρθρο. Τα δεδομένα δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Έτος	Αριθμός κρουσμάτων
1998	164
1999	142
2000	153
2001	171
2002	171
2003	148
2004	136
2005	133
2006	138
2007	132

Εσείς θεωρείτε ότι στην πραγματικότητα η νοσηρότητα δεν μεταβλήθηκε. Για τον λόγο αυτό εξομαλύνετε τα δεδομένα θεωρώντας ότι το ίδιο συνολικό πλήθος κρουσμάτων που καταγράφηκε στην δεκαετία κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλα τα χρόνια. Θέλετε να ελέγξετε αν αυτή η υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% εφαρμόζοντας τον έλεγχο  $\chi^2$

Δίνονται:

Κρίσιμες τιμές  $\chi^2_{\alpha;n}$  της κατανομής  $\chi^2$

$n$	$\chi^2_{0,995;n}$	$\chi^2_{0,99;n}$	$\chi^2_{0,975;n}$	$\chi^2_{0,95;n}$	$\chi^2_{0,05;n}$	$\chi^2_{0,025;n}$	$\chi^2_{0,001;n}$	$\chi^2_{0,005;n}$
6	0,676	0,872	1,237	1,635	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	18,307	20,483	23,209	25,188



3B. Ένα τυχαίο δείγμα αποτελείται από τις ακόλουθες τιμές:

{0,203, 0,382, 0,329, 0,480, 0,477}

Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι η κατανομή του δείγματος είναι η ακόλουθη

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } x < 0 \\ x & \text{εάν } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{εάν } 1 \leq x \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την στατιστική Kolmogorov-Smirnov  $D_n(x)$  (5 μονάδες)

#### Άσκηση 4

Μια μελέτη ερευνήσε την θνησιμότητα προσώπων μεταξύ των ηλικιών 65 και 66. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει ένα απόσπασμα από τα αποτελέσματα της μελέτης. Για κάθε πρόσωπο δίνει την ηλικία έναρξης της παρατήρησης, την ηλικία όπου σταμάτησε η παρατήρηση και τον λόγο εξόδου από την παρατήρηση.

πρόσωπο	Ηλικία στην είσοδο		ηλικία στην έξοδο		αίτιο εξόδου
	έτος	Μήνας	έτος	μήνας	
1	65	0	65	6	αποχώρηση
2	65	1	66	0	επιβίωση
3	65	1	65	3	θάνατος
4	65	2	66	0	επιβίωση
5	65	3	65	9	θάνατος
6	65	4	66	0	επιβίωση
7	65	5	65	11	θάνατος
8	65	6	66	0	επιβίωση
9	65	8	65	10	θάνατος
10	65	9	66	0	επιβίωση

- a) Να υπολογίσετε την  $q_{65}$  και την διασπορά της χρησιμοποιώντας το διωνυμικό πρότυπο  
b) Να υπολογίσετε την  $q_{65}$  και την διασπορά της χρησιμοποιώντας το πρότυπο Poisson



**Άσκηση 5**

**5A.** Η κατανομή των παρατηρήσεών μου είναι η Poisson με παράμετρο  $\Lambda$  με  $f_{X/\Lambda}(X = x / \Lambda = \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ . Η εκ των προτέρων κατανομή της παραμέτρου  $\Lambda$  είναι η διακριτή ομοιόμορφη κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας  $\Pr(\Lambda = \lambda) = \frac{1}{3}$ ,  $\lambda = 1, 2, 3$ . Να υπολογίσετε την εκ των υστέρων κατανομή της παραμέτρου  $\Lambda$  και να βρείτε τον μέσο της ύστερης κατανομής δεδομένου ότι το αποτέλεσμα μιας παρατήρησης ήταν  $X=1$ .

**5B.** Σε μια εξομάλυνση Whittaker δίνονται τα ακόλουθα:

- Ο τύπος ελαχιστοποιεί τις τρίτες διαφορές
- Η παράμετρος που ελέγχει τη σχετική έμφαση ανάμεσα στην καλή εφαρμογή των δεδομένων και το λείο είναι 3
- Τα βάρη  $w_x = 4$  για κάθε  $x$

- $$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

- $$u_4 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + a_5 v_5$$

Να υπολογίσετε το  $a_4$