ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ** **ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**			
Ημερομηνία:	**Πρωί:**		**Απόγευμα:**	**x**
Θεματική ενότητα: Αρχές Οικονομίας και Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά				

Θέμα 1ο

α) Η παρούσα αξία μιας διηνεκούς ράντας που πληρώνει 2 μονάδες στο τέλος κάθε 8 ετών ισούται με 5. Υπολογίστε το ετήσιο αποτελεσματικό επιτόκιο i

β) Καταθέτει κάποιος ποσό ύψους X σε χρόνο t = 0 με ετήσιο αποτελεσματικό επιτόκιο 6% για 10 έτη. Καταθέτει κάποιος άλλος ποσό ύψους X/2 σε χρόνο t = 0 με ετήσιο αποτελεσματικό επιτόκιο προεξόφλησης d για 10 έτη επίσης. Στο τέλος των 10 ετών το ποσό του τόκου που κερδήθηκε στην πρώτη περίπτωση είναι ίσο με αυτό της δεύτερης. Βρείτε το d.

γ) Γίνονται ετήσιες πληρωμές στο τέλος κάθε έτους στο διηνεκές. Το ύψος των πληρωμών για κάθε έτος t , με $0 \le t \le n$, είναι t^2. Το ύψος των πληρωμών μετά το έτος n είναι n σταθερό. Το ετήσιο αποτελεσματικό επιτόκιο είναι 0% από την αρχή έως και το τέλος του έτους n και 10% από την αρχή του έτους n+1 και μετά. Η παρούσα αξία της ράντας αυτής στο t= 0 είναι 30n. Βρείτε το n.

δ) Για $0 \le t \le k$ ισχύει απλός τόκος i=10%. Για $t > k$ ισχύει ένταση ανατοκισμού δ=8%. Να βρείτε το k που μεγιστοποιεί την α(4) , την συνάρτηση συσσώρευσης στον χρόνο 4.

ε) Δάνειο ύψους 50.000 αποπληρώνεται σε 20 χρόνια ως εξής :

i) με ετήσιες πληρωμές: X, 2X, 3X… 10X από το τέλος του 1ου έτους έως το τέλος του 10ου έτους και,

ii) με ετήσιες πληρωμές: $10(1.05)X$,$10(1.05)^2 X$,…, $10(1.05)^{10} X$ από το τέλος του 11ου έτους έως το τέλος του 20ου έτους. Το ετήσιο αποτελεσματικό επιτόκιο είναι 7% για τα πρώτα 10 έτη και 5% για τα επόμενα 10. Βρείτε το X

Θέμα 2ο

α) Στην αρχή κάθε έτους και για n έτη καταθέτει κάποιος 1 μονάδα σε λογαριασμό που αποδίδει επιτόκιο i. Στο τέλος κάθε έτους αποσύρει τους τόκους και τους τοποθετεί σε άλλο λογαριασμό με επιτόκιο j =3i για το οποίο ισχύει $s_{\overline{n+1|}\,j}$ =4n+1. Στο τέλος των n ετών κλείνει τους λογαριασμούς και τοποθετεί όλα τα ποσά σε νέο λογαριασμό με επιτόκιο k για m χρόνια. Να δείξετε ότι εάν στο τέλος των m ετών ο λογαριασμός ισούται με 4n τότε το k = $2^{\frac{1}{m}} - 1$

β) Καταθέτει κάποιος σε έναν λογαριασμό 100 στην αρχή κάθε 4ετίας για 40 χρόνια (δηλαδή κάνει συνολικά 10 καταβολές) με αποτελεσματικό επιτόκιο i. Το ποσό που συσσωρεύεται στο τέλος των 40 ετών είναι X. Καταθέτει κάποιος άλλος σε έναν λογαριασμό 100 στην αρχή κάθε 4ετίας για 20 χρόνια (δηλαδή κάνει συνολικά 5 καταβολές) με αποτελεσματικό επιτόκιο i. Το ποσό που συσσωρεύεται στο τέλος των 20 ετών είναι X/5. Να αποδείξετε ότι το X= 6.194,79

γ) Την 1/1/t ένας λογαριασμός έχει 75 μονάδες και στις 31/12 /t έχει 60 μονάδες. Επίσης κατά την διάρκεια του έτους t, στο τέλος κάθε μήνα γίνεται κατάθεση 10 μονάδων. Στις 28/2/t γίνεται ανάληψη 5 μονάδων, στις 30/6/t γίνεται ανάληψη 25 μονάδων, στις 15/10/t γίνεται ανάληψη 80 μονάδων και στις 30/10/t γίνεται ανάληψη 35 μονάδων. Υπολογίστε την ετήσια απόδοση (yield rate) χρησιμοποιώντας την Dollar - Weighted Method.

δ) Δάνειο 12.000 εξοφλείται με πληρωμές 1.000 στο τέλος κάθε έτους για 22 έτη. Εάν κάθε πληρωμή αμέσως επανεπενδύεται με επιτόκιο i = 6% βρείτε την ετήσια απόδοση (yield rate) για την περίοδο των 22 ετών.

ε) Καταθέτει κάποιος κεφάλαιο 10.000 σε χρόνο t=0 με ετήσιο αποτελεσματικό επιτόκιο 5%. Στο τέλος κάθε έτους κάνει αναλήψεις 1.000 από το κεφάλαιο. Στο τέλος του δεκάτου έτους το κεφάλαιο μηδενίζεται. Εάν τους τόκους που κερδίζει κάθε χρόνο το κεφάλαιό του μαζί με τις αναλήψεις, τις επενδύει σε άλλο λογαριασμό με ετήσιο αποτελεσματικό επιτόκιο 7% ποια η ετήσια απόδοση (yield rate) της δεκαετούς επένδυσης ?

Θέμα 3ο

α) Να αποδείξετε ότι η τιμή ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης (Forward Contract) την χρονική στιγμή t επί ενός αξιογράφου αξίας S_t το οποίο κατά την διάρκεια του συμβολαίου παρέχει γνωστό εισόδημα με παρούσα αξία I_t, δίδεται από την σχέση: $F_t = (S_t - I_t) * e^{r(T-t)}$ όπου r η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού και
T-t η διάρκεια μέχρι την λήξη του συμβολαίου.

β) Στο τέλος κάθε περιόδου, η τιμή μιας μετοχής με σημερινή τιμή 1 θα γίνεται $(\frac{4}{3} > 1)$ ή $(\frac{1}{2} < 1)$.

Η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού είναι μηδενική.

(I) Να υπολογίσετε την κινδυνοουδέτερη πιθανότητα καθόδου (q) της μετοχής.

(II) Να υπολογίσετε την σημερινή τιμή ενός δικαιώματος πώλησης (put option) της μετοχής στο τέλος 2 περιόδων από σήμερα έναντι του ποσού K=1.

γ) Δοθέντος ότι για το αντίστοιχο δικαίωμα αγοράς (call option) του ερωτήματος β)(II) ισχύουν οι προϋποθέσεις της ισότητας put-call parity, να υπολογίσετε την σημερινή τιμή αυτού με την βοήθεια αυτής.

δ) Εάν στο πρότυπο Black-Scholes $S = K = \frac{1}{2}$, $r = 0$, $t = 0$, $T = 4$ και σ η τυπική απόκλιση της απόδοσης του υποκείμενου αξιογράφου το οποίο δεν παρέχει κανενός είδους εισόδημα, να βρεθεί η τιμή $c = c(\sigma)$ ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (Call Option) επί αυτού στο $t = 0$ και η παράγωγος $\frac{dc}{d\sigma}$.

ε) Το πρότυπο Black-Scholes ισχύει υπό προϋποθέσεις. Να απαριθμήσετε αυτές τις προϋποθέσεις.

Θέμα 4ο

α) Έστω ένα δάνειο ύψους 1, διάρκειας n-ετών, το οποίο αποπληρώνεται με την μέθοδο Sinking Fund (j είναι το επιτόκιο βάσει του οποίου υπολογίζεται ο τόκος που καταβάλλει ο δανειολήπτης και i το επιτόκιο βάσει του οποίου ο δανειολήπτης χτίζει το κεφάλαιο του δανείου στο τέλος των n-ετών). Να εκφραστούν ως συνάρτηση μόνο των επιτοκίων i, j τα μεγέθη της συνολικής ετήσιας επιβάρυνσης του δανειολήπτη καθώς και τα $(NAL)(t)$, $(NAI)(t)$ και $\frac{(NAL)(t)}{(NAI)(t)}$.

β) Για το δάνειο της περίπτωσης α) ανωτέρω, ποιο το ετήσιο όφελος του δανειολήπτη στην περίπτωση που το αποπληρώνει με την μέθοδο Sinking Fund με υπόθεση ότι $i > j$ έναντι καταβολής της αντίστοιχης τοκοχρεωλυτικής δόσης με επιτόκιο i;

γ) Ένα δάνειο πρόκειται να αποσβεσθεί με (n) σταθερές ετήσιες τοκοχρεωλυτικές δόσεις όπου $n > 8$.Να υπολογιστεί η ετήσια δόση εάν το ποσό του τόκου στην 2η δόση είναι 500, το ποσό του τόκου στην 5η δόση είναι 450 και το ποσό του τόκου στην 8η δόση είναι 50.

δ) Ένα δάνειο αποπληρώνεται με 2n-σταθερές ετήσιες τοκοχρεωλυτικές δόσεις ύψους 1. Ο δανειολήπτης ανοσοποιεί την υποχρέωση καταβολής των τοκοχρεωλυτικών δόσεων με τρία ποσά, x στο $t = 0$, 1 στο $t = n$ και $\frac{y}{2}$ στο $t = 2n$. Να βρεθούν τα x, y και η μέση διάρκεια των τοκοχρεωλυτικών δόσεων.

ε) Δάνειο ύψους 100 μονάδων με επιτόκιο i αποπληρώνεται με ετήσιες δόσεις $R(t) = (1+i)^t$ για t = 1, 2, ...,100. Ο τόκος που περιέχεται στη 74η δόση είναι ίσος με τον τόκο που περιέχεται στην 75η δόση. Να βρεθεί το επιτόκιο i.

Θέμα 5ο

α) Έστω ομολογία με διάρκεια 3 έτη, $F = C$ και τιμή αγοράς κατά την έκδοση $P = 0{,}8C$.Η ομολογία καταβάλλει κουπόνι στο τέλος κάθε εξαμήνου στην διάρκεια των 2 πρώτων ετών ενώ στην συνέχεια δεν καταβάλλει κουπόνι.

Έστω $s_{\frac{1}{2}} = 0{,}02$, $s_{\frac{2}{2}} = 0{,}025$, $s_{\frac{3}{2}} = 0{,}03$, $s_{\frac{4}{2}} = 0{,}035$ τα επιτόκια τρέχουσας τοποθέτησης (spot rates) διάρκειας 1,2,3,4 εξαμήνων αντίστοιχα και έστω ότι η τιμή της ομολογίας χωρίς τοκομερίδια με διάρκεια 6 εξάμηνα είναι 0,7.Να υπολογίσετε το επιτόκιο κουπονιού $r^{(2)}$.

β) Μια 10ετής ομολογία με $F = C$ και 5% ετήσιο κουπόνι, έχει ετήσια απόδοση 5,5%. Έστω $P_1 = 99{,}23$ μονάδες η ακριβής τιμή της ομολογίας όταν η ετήσια απόδοση γίνει 5% και έστω $P_2 = 98{,}43$ μονάδες η αντίστοιχη προσεγγιστική τιμή που βασίζεται στην μέση διάρκεια της ομολογίας. Να υπολογιστεί η μέση διάρκεια της ομολογίας.

γ) Για τα spot rates ισχύουν $s_2 = 0{,}034$ και $(1+s_3)^3 = 1{,}141166$. Το forward rate f_4 είναι ίσο με 5,2052%. Να βρεθούν τα f_3 και s_4 .

δ) Μια 2ετής ομολογία για την οποία $C = F = 100$ και ετήσιο επιτόκιο κουπονιού $r = 4\%$ αγοράζεται προς $P = 101$. Να βρεθεί η απόδοση του αγοραστή (αν κρατήσει την ομολογία μέχρι την λήξη της).

ε) Σε μια αγορά τα χωρίς τοκομερίδιο ομόλογα (zero coupon bonds) διάρκειας t, t = 1, 2, …, 10, τιμώνται προς $P_t = \dfrac{10}{10+t}$. Να εκφρασθούν ως συνάρτηση της διάρκειας t τα spot rates και forward rates που έπονται από τις παραπάνω τιμές. Να διερευνηθεί εάν η καμπύλη αποδόσεων είναι αντεστραμμένη ή όχι.