ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΣΥΜΒΑΝΤΩΝ ΖΩΗΣ & ΘΑΝΑΤΟΥ** **24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**			
Ημερομηνία:	**Πρωί:**		**Απόγευμα:**	**Χ**
Θεματική ενότητα: Αναλογιστικά Πρότυπα Συμβάντων Ζωής & Θανάτου (Αγ)				

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α !!!!!!

Θέμα 1ο

1) Να υπολογιστεί το ${}_{\frac{3}{4}}V^{(2)}\left(D^{(4)}A^{(4)}\right)_{80:\overline{\frac{6}{4}}|}^{1}$ με τη χρήση του τύπου ορισμού του Μαθηματικού Αποθέματος (αναλογιστική παρούσα αξία των μελλοντικών παροχών μείον την αναλογιστική παρούσα αξία των μελλοντικών ασφαλίστρων).(**5 μονάδες**)

2) Εάν η απάντηση στο ερώτημα Α είναι -0,003664, να υπολογίσετε το Μαθηματικό Απόθεμα στο χρονικό σημείο $t = \frac{2}{4}$ με χρήση του αναδρομικού τύπου.(**2,5 μονάδες**)

3) Εάν η απάντηση στο ερώτημα Α είναι -0,003664 και στο Β -0,019412, να υπολογίσετε το Μαθηματικό Απόθεμα στο χρονικό σημείο $t = \frac{2}{4} + \frac{1}{12}$ με χρήση της μεθόδου της γραμμικής παρεμβολής. (**2,5 μονάδες**)

Δίνεται:

i. $i = 0{,}03$

ii. $q_{80} = 0{,}081145,\ q_{81} = 0{,}088917$

iii. $P^{(2)}\left(D^{(4)}A^{(4)}\right)_{80:\overline{\frac{6}{4}}|}^{1} = 0{,}073679$

iv. Για τον υπολογισμό πιθανοτήτων εντός των ηλικιακών διαστημάτων της μορφής $[x, x+1)$,να γίνει χρήση της «υπόθεσης της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων».

Θέμα 2ο

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{d}{dx}q_x = p_x\left(\mu_{x+1}-\mu_x\right)$. (**1 μονάδα**)

ii. Να αποδείξετε ότι $\frac{\left(\ddot{s}_{40:\overline{20}|}-\ddot{a}_{40:\overline{20}|}\right){}_{20}E_{40}}{\left(\ddot{a}_{40:\overline{20}|}\right)^2}-d = P^1_{40:\overline{20}|}$. (**1 μονάδα**)

iii. Να αποδείξετε ότι $Cov\left(\bar{a}_{\overline{T}|},v^T\right)=\frac{\bar{A}_x^2-{}^2\bar{A}_x}{\delta}$, η τυχαία μεταβλητή T είναι ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του (x).(**1 μονάδα**)

iv. Να αποδείξετε ότι $\frac{d}{dx}\left({}_nE_x\right)={}_nE_x\left(\mu_x-\mu_{x+n}\right)$ και $\frac{d}{dn}\left({}_nE_x\right)=-{}_nE_x\left(\delta+\mu_{x+n}\right)$.(**1 μονάδα**)

v. Έστω $K=\frac{d}{dx}{}_{10}E_x$, $L=\frac{d}{dn}{}_nE_x\,|_{n=5}$. Να υπολογιστεί η $\frac{K}{L}\left(\mu_{x+5}+\delta\right)$.(**2μονάδες**)

vi. Να αποδείξετε ότι $\frac{d}{dx}\bar{s}_{x:\overline{n}|}=\bar{s}_{x:\overline{n}|}\mu_{x+n}-\frac{1}{{}_nE_x}\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$.(**2μονάδες**)

vii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt=\frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}-{}_np_x\bar{a}_n$. (**2μονάδες**)

Θέμα 3ο

1. Για ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα με έναν συμμετέχοντα με τρέχουσα ηλικία 50 ετών, δίνονται:
   i. Ηλικία εργαζομένου κατά τη στιγμή της πρόσληψηςκαι ένταξης στο συνταξιοδοτικό πρόγραμμα 40 ετών.
   ii. Το ποσό της σύνταξης είναι 2% του συνολικού μισθού της διάρκειας των ετών υπηρεσίας του συμμετέχοντα.
   iii. Ο τρέχον μισθός, μετά την αύξηση, στην ηλικία των 50 ετών είναι 40.000.
   iv. Η μισθολογική κλίμακα είναι $S_{50+t} = 1,04^t, t \geq 0$. Η αύξηση του μισθού γίνεται στην αρχή κάθε έτους.
   v. Το ποσοστό εισφοράς είναι 3% του μισθού στην αρχή κάθε έτους.
   vi. Η συσσωρευμένη αξία των προηγούμενων εισφορών είναι 50.000.
   vii. Ο συνολικός προηγούμενος μισθός είναι 350.000.
   viii. Το κεφάλαιο θανάτου το οποίο καταβάλλεται στο τέλος του έτους θανάτου είναι η επιστροφή των εισφορών με τόκο 4% και ισχύει για την περίοδο πριν τη συνταξιοδότηση. (Δεν υφίσταται κεφάλαιο θανάτου κατά την περίοδο συνταξιοδότησης).
   ix. Επιτόκιο αποτίμησης i=4%.
   x. $\ddot{a}_{65}^{(12)} = 10$
   xi. $\ddot{a}_{50:\overline{15}|} = 9$
   xii. ${}_{15}p_{50} = 0,7$
   xiii. Πριν την ηλικία των 65 ετών δεν υπάρχει κανένα άλλο αίτιο εξόδου εκτός του θανάτου.
   xiv. $\sum_{k=0}^{14} k\, {}_{k/}q_{50} = 2,1$.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω:

a) Το ποσό της ετήσιας σύνταξης στην ηλικία των 65 ετών. (**2 μονάδες**)
b) Η αναλογιστική παρούσα αξία της ετήσιας σύνταξης στην τρέχουσα ηλικία του εργαζόμενου. (**2 μονάδες**)
c) Η αναλογιστική παρούσα αξία της κάλυψης του θανάτου στην τρέχουσα ηλικία του εργαζόμενου. (**3 μονάδες**)

2. Με επιτόκιο i=2,5% και πίνακα θνησιμότητας $q_{108} = 1$, να υπολογιστούν οι ποσότητες $A_{108}^{(3)}$ και $A_{108+\frac{1}{3}}^{(3)}$, χρησιμοποιώντας την υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής των θανάτων. (**3 μονάδες**)

Θέμα 4ο

Ασφαλισμένος (33) συμμετέχει, από τριετίας, σε συνταξιοδοτικό πλάνο τύπου «Defined-Benefit». Το πλάνο παρέχει τα εξής:

Α. Ισόβια **σύνταξη γήρατος** (age retirement) καταβαλλόμενη με συνεχή ρυθμό, με περίοδο βέβαιων καταβολών 10 ετών, το προβεβλημένο ετήσιο ύψος της οποίας (Projected Annual Income Benefit Rate) ανέρχεται σε ποσοστό 2% επί του μέσου ετήσιου μισθού των τελευταίων 2 εργάσιμων ετών, πολλαπλασιασμένο με το συνολικό χρόνο υπηρεσίας, εκφρασμένο σε έτη. Η θεμελίωση του δικαιώματος συνταξιοδότησης προϋποθέτει τη συμπλήρωση του 60ου έτους ζωής του ασφαλισμένου, ενώ κατά τη συμπλήρωση του 62ου έτους, η συνταξιοδότηση καθίσταται υποχρεωτική.

Β. Ισόβια **σύνταξη γήρατος** καταβαλλόμενη με συνεχή ρυθμό, η οποία παρέχεται σε περίπτωση πρόωρης αποχώρησης από το πλάνο (withdrawal), υπό την προϋπόθεση παραμονής σ' αυτό για τουλάχιστον 5 έτη. Πρόωρη θεωρείται η αποχώρηση η οποία συμβαίνει πριν από την πρώτη επιλέξιμη για συνταξιοδότηση λόγω γήρατος ηλικία (60). Η φόρμουλα υπολογισμού του Projected Annual Income Benefit Rate παραμένει ως έχει στο σημείο Α ανωτέρω, ενώ η έναρξη καταβολής της σύνταξης τοποθετείται στην ηλικία 60.

Γ. Σύνταξη αναπηρίας, εφόσον ο ασφαλισμένος καταστεί μόνιμα ανίκανος προς εργασία και δεν έχει υπερβεί την πρώτη επιλέξιμη για συνταξιοδότηση λόγω γήρατος ηλικία (60). Η φόρμουλα υπολογισμού του Projected Annual Income Benefit Rate παραμένει ως έχει στο σημείο Α ανωτέρω, ενώ η έναρξη καταβολής της σύνταξης είναι άμεση.

Δ. Εφάπαξ παροχή σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου, ενόσω βρίσκεται σε καθεστώς υπηρεσίας. Το ποσό της παροχής ορίζεται ως το διπλάσιο του τρέχοντος ετήσιου μισθού.

Δίνεται:

Οι τρέχουσες ετήσιες αποδοχές του ασφαλισμένου, από την εργασία του, ανέρχονται σε ποσό ύψους €45.000.

$R(x;h;t) = 2\% \times (h+t) \times \left((AS)_{x+h} \frac{{}_2Z_{x+h+k}}{S_{x+h}}\right)$: Projected Annual Income Benefit Rate, όπου:

x: Ηλικία εισόδου στο συνταξιοδοτικό πλάνο.

h: Χρόνος υπηρεσίας έως σήμερα, σε έτη.

t: Χρόνος από σήμερα έως τη συνταξιοδότηση, σε έτη.

k: Ακέραιο πλήθος ετών υπηρεσίας, από σήμερα έως τη συνταξιοδότηση.

$(AS)_{x+h}$: Actual Salary κατά την ηλικία $x+h$ και

$(AS)_{x+h}\frac{{}_2Z_{x+h+k}}{S_{x+h}}$: Projected final 2-year average salary.

Επιτόκιο 3%.

Για όλα τα decrements ισχύει η υπόθεση «Uniform Distribution of Decrement» εντός των ηλικιακών διαστημάτων.

x	S_x
33	1,20
60	6,21
61	6,56

t	${}_tp_{33}^{(\tau)}$	$q_{33+t}^{(r)}$	$q_{33+t}^{(w)}$	$q_{33+t}^{(i)}$	$q_{33+t}^{(d)}$	${}_2Z_{33+t}$
26	0,4413		0,0049	0,0087		5,633
27	0,4297	0,1489				5,865
28	0,3600	0,0794			0,0150	6,210
29	0,3261					

x	${}_{10}p_x^r$	${}_{0,5}p_x^w$	${}_{10}p_x^w$	${}_{10}p_x^i$
59,5		0,9935		0,5584
60			0,8080	
60,5	0,8002			
61,5	0,7837			
62	0,7750			

x	$\bar{a}_x^r$	$\bar{a}_x^w$	$\bar{a}_x^i$
69,5			6,3127
70		9,7974	
70,5	9,6006		
71,5	9,2106		
72	9,0174		

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστεί η αναλογιστική παρούσα αξία της υπό το σημείο Α ανωτέρω παροχής.

(**7 μονάδες**)

2. Να γραφούν οι τύποι υπολογισμού της αναλογιστικής παρούσας αξίας των υπό τα σημεία Β, Γ, Δ ανωτέρω παροχών, όπως διαμορφώνονται μετά την υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής των decrements, εντός των ηλικιακών διαστημάτων. (**1 μονάδα**)
3. Να υπολογιστεί ο τελευταίος προσθετέος των υπό το ερώτημα 2 ανωτέρω αθροισμάτων. (**2 μονάδες**).

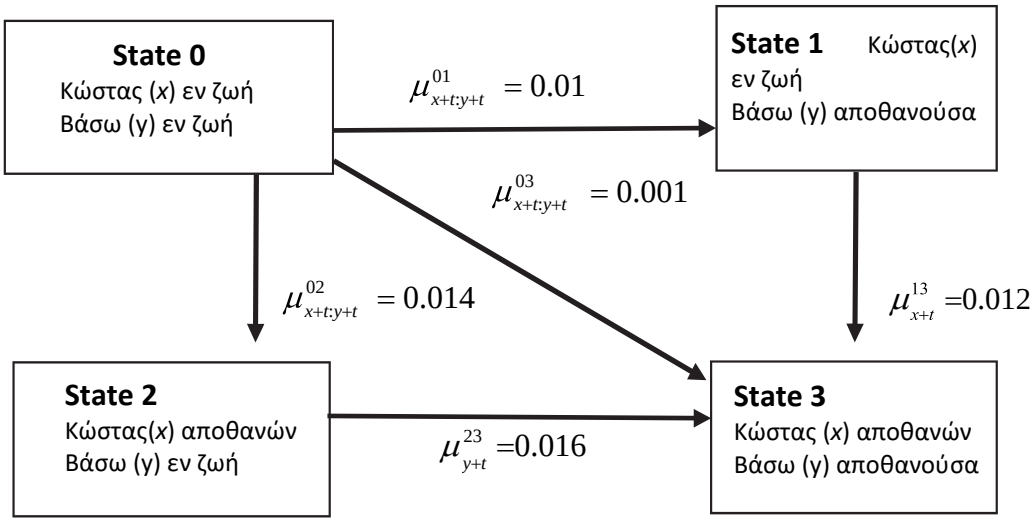
Θέμα 5ο

1. Ο Κώστας και η Βάσω ηλικίας x και y αντίστοιχα αποφασίζουν να αγοράσουν από κοινού μια ειδική πρόσκαιρη ασφάλιση διάρκειας 10 ετών, όπου η παροχή στο θάνατο είναι 100.000€.

Η παροχή πληρώνεται την στιγμή του ταυτόχρονου θανάτου και των δύο ασφαλισμένων (η περίπτωση αυτή ονομάζεται common shock risk).
Η παροχή επίσης πληρώνεται την στιγμή του θανάτου του Κώστα (x), εάν έχει αποβιώσει η Βάσω(y) πρώτη. Επίσης δεν πληρώνεται κάποια παροχή εάν ο Κώστας (x)αποβιώσει πρώτος.

Τα καθαρά ασφάλιστρα πληρώνονται συνεχώς με ετήσιο ασφάλιστρο P, όσο είναι εν ζωή και οι δύο ασφαλισμένοι και με ετήσιο ασφάλιστρο 0,75*P μετά το θάνατο της Βάσως(y).

Το συμβόλαιο έχει τιμολογηθεί με ένταση ανατοκισμού δ=6% και ισχύει το παρακάτω μοντέλο “Common shock model”:



1. Να δείξετε ότι ${}_tp_{xy}^{01} = \frac{10}{13}\ (e^{-0.012t}\text{-}e^{-0.025t})$. (**2,5 μονάδες**)
2. (**3 μονάδες**)
   i) Να υπολογισθεί η αναλογιστική παρούσα αξία της παροχής στον ταυτόχρονο θάνατο και των δύο ασφαλισμένων.
   ii) Να υπολογισθεί η αναλογιστική παρούσα αξία της παροχής στο θάνατο του Κώστα (x)εάν έχει αποβιώσει η Βάσω(y)πρώτη.
3. Να υπολογισθεί το ετήσιο καθαρό ασφάλιστρο P.(**2 μονάδες**)
4. Να υπολογισθεί το άρτιο μαθηματικό απόθεμα τη χρονική στιγμή t=5, με δεδομένο ότι μόνο ο Κώστας (x)είναι εν ζωή. (**2,5 μονάδες**)