ΕΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ	**ΕΝΤΥΠΟ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**	**F3W2.PR09**

Όνομα:	**Επίθετο:**			
Ημερομηνία:	**Πρωί:**		**Απόγευμα:**	**x**
Θεματική ενότητα: Χρηματοοικονομικά πρότυπα, ΚΩΔ Αε				

1. **(α)** Θεωρούμε τα παρακάτω δύο χαρτοφυλάκια μετοχών.

Χαρτοφυλάκιο I				
Μετοχή	M_1	M_2	. . .	M_n
Απόδοση	μ_1	μ_2	. . .	μ_n
Κίνδυνος (σ)	σ_1	σ_2	. . .	σ_n

Χαρτοφυλάκιο II				
Μετοχή	K_1	K_2	. . .	K_n
Απόδοση	μ_1	μ_2	. . .	μ_n
Κίνδυνος (σ)	$\lambda\sigma_1$	$\lambda\sigma_2$	. . .	$\lambda\sigma_n$

όπου λ > 0. Τα δύο χαρτοφυλάκια έχουν τους ίδιους συντελεστές συσχέτισης δηλαδή $\rho_{M_iM_j} = \rho_{K_iK_j}$ για $i, j = 1, \cdots, n$.

(i) **(3 βαθμοί)** Να δείξετε ότι το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς του χαρτοφυλακίου I είναι το ίδιο με το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς του χαρτοφυλακίου II.

(ii) **(2 βαθμοί)** Αν πούμε $\sigma^2_{I,\min}$ και $\sigma^2_{II,\min}$ την ελάχιστη διασπορά των χαρτοφυλακίων I και II αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\sigma_{II,\min} = \lambda\sigma_{I,\min}$.

(β) **(3 βαθμοί)** Αν για τρείς μετοχές ο πίνακας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων είναι ο

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}01000 & -0{,}00875 & -0{,}01000 \\ -0{,}00875 & 0{,}06250 & 0{,}01500 \\ -0{,}01000 & 0{,}01500 & 0{,}04000 \end{pmatrix}$$

με αντίστροφο τον

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 141{,}63424 & 12{,}451360 & 30{,}739300 \\ 12{,}451360 & 18{,}677040 & -3{,}891050 \\ 30{,}739300 & -3{,}891050 & 34{,}143970 \end{pmatrix}$$

να βρεθεί η σύνθεση και η διασπορά του χαρτοφυλακίου ελάχιστης διασποράς.

(γ) **(2 βαθμοί)** Σε 4 περιόδους από τώρα, μια ασφαλιστική εταιρία εκτιμά ότι θα χρειαστεί να έχει για τις πληρωμές της ρευστότητα 100. Στο Διοικητικό συμβούλιο αποφασίστηκε ότι 50 θα πληρωθούν άμεσα στο τέλος των 4 περιόδων, 30 θα προκύψουν από πώληση περιουσιακών στοιχείων στο τέλος των 3 περιόδων, ενώ άλλα δύο ποσά θα εκταμιευθούν στο τέλος της $1^{ης}$ και της $2^{ης}$ περιόδου. Αποφασίστηκε επίσης ότι η μέση διάρκεια των ποσών που θα τοποθετηθούν στις 4 περιόδους να είναι 3,24. Αν το ακίνδυνο επιτόκιο είναι 5%, ποια ποσά θα πρέπει να τοποθετηθούν στο τέλος των περιόδων 1 και 2;

2. Η μετοχή Μ, που αξίζει 1, σε μία περίοδο είτε θα ανέβει σε 1 + α , είτε θα κατέβει σε 1 – β , όπου 0 < α < 1 και 0 < β < 1. Στην αγορά υπάρχουν όλα τα μονοετή Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς (call options) επι της μετοχής Μ με τιμές άσκησης από 1 – β μέχρι 1 + α. Το επιτόκιο της αγοράς είναι σταθερό και ίσο με i .

(α) (4 βαθμοί) Αν μια Τράπεζα αγοράσει τώρα όλα τα παραπάνω δικαιώματα να δείξετε ότι θα πρέπει να καταβάλει ποσό

$$\frac{(\alpha+\beta)(\beta+i)}{2(1+i)}$$

(β) (4 βαθμοί) Αν στη λήξη η τιμή της μετοχής είναι 1 + α, να δείξετε ότι το οικονομικό αποτέλεσμα της Τράπεζας

(απολαβή στη λήξη μείον αρχική καταβολή τοκισμένη) θα είναι $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha-i)$

Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα αν η τιμή της μετοχής στη λήξη είναι 1 – β ;

(γ) (2 βαθμοί) Αν η πραγματική πιθανότητα ανόδου της μετοχής είναι 1/4 και ορίσουμε ως μέτρο **P** τις πραγματικές πιθανότητες ανόδου και καθόδου, ενώ ως μέτρο **Q** τις αντίστοιχες κινδυνοουδέτερες πιθανότητες, να δείξετε ότι κάτω από το μέτρο **Q** η αναμενόμενη τιμή της παραγώγου Radon – Nikodym d**Q**/d**P** είναι

$$\frac{\alpha+\beta}{16}\left(\frac{1}{i+\beta}+\frac{\alpha}{\alpha-i}\right), \text{ με } \alpha \neq i.$$

3. **(α) (4 βαθμοί)** Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (call option) πωλείται έναντι 35,245. Ο πωλητής του δικαιώματος θωρακίζεται (hedge) έναντι του κινδύνου μικρής μεταβολής της τιμής της υποκείμενης στο δικαίωμα μετοχής με αγορά 0,709098 μετοχών και με δάνειο ποσού 42,75568 με την ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού. Αν την επόμενη ημέρα (1/365), η τιμή της μετοχής αυξηθεί κατά 1 ποιο θα είναι το κέρδος ή η ζημιά του πωλητή του δικαιώματος μετά την εφαρμογή της στρατηγικής θωράκισης; Να συγκριθεί με το αντίστοιχο κέρδος ή ζημιά χωρίς τη χρήση θωράκισης. Η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού είναι 1,2%.

(β) (1 βαθμός) Γιατί το Δέλτα (Delta) ενός δικαιώματος αγοράς μετοχής είναι πάντα μεταξύ 0 και 1;

(γ) (2 βαθμοί) Να δείξετε ότι το Δέλτα (Delta) ενός δικαιώματος αγοράς (call option) είναι 1/2 μόνο όταν ισχύει

$$K = S_0 e^{\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}$$

(δ) (3 βαθμοί) Το Δέλτα (Delta) ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από ένα δικαίωμα αγοράς μετοχής (call option) και από ένα αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης (put option) επι της ιδίας μετοχής είναι 0,05034. Ποιο είναι το Δέλτα του call και ποιο είναι το Δέλτα του put;

4. **(α)** Οι μετοχές Α και Β εκτελούν γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους $\mu_A = 12\%$, $\mu_B = 15\%$, $\sigma_A = 36\%$, $\sigma_B = 52\%$. Ο στοχαστικός παράγοντας είναι ο ίδιος και για τις δύο μετοχές. Οι αρχικές τιμές τους είναι $A_0 = 100$ και $B_0 = 80$. Με την αγορά μιας μετοχής ο επενδυτής επιβαρύνεται με ένα κόστος 4% (προμήθεια) επι της τρέχουσας τιμής της.

(i) (3 βαθμοί) Ποια είναι η πιθανότητα σε δύο ακριβώς χρόνια το καθαρό κέρδος από την αγορά μιας μετοχής Α να είναι πάνω από 10;

(ii) (3 βαθμοί) Ποια είναι η πιθανότητα σε δύο ακριβώς χρόνια το καθαρό κέρδος από την αγορά μιας μετοχής Β να είναι πάνω από 10;

(β) Σε μια γεωμετρική κίνηση Brown τη χρονική στιγμή 4 η αναμενόμενη τιμή είναι 1,350 ενώ η διασπορά είναι 0,067. Στην ίδια γεωμετρική κίνηση, η αναμενόμενη τιμή τη χρονική στιγμή 5 είναι 1,455.

(i) (2 βαθμοί) Ποια είναι η διασπορά τη χρονική στιγμή 5;

(ii)(2 βαθμοί) Αν στο t = 5 προκύψει $W_5 = -0{,}1313$ ποια θα είναι η πραγματική τιμή της μετοχής δεδομένου ότι η αρχική τιμή της είναι 1;

Δίδονται N(0,22470) = 0,588894 , N(0,29230) = 0,614971

5. Για τη μετοχή S, της οποίας η τιμή σήμερα είναι 60 και η οποία εκτελεί γεωμετρική κίνηση Brown με συντελεστή κατεύθυνσης 10%, η τιμή ενός τριετούς Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (call option) επι της μετοχής S με τιμή άσκησης το 90% της σημερινής τιμής της είναι 15,698. Η ακίνδυνη ένταση ανατοκισμού είναι 1%.

(α) (4 βαθμοί) Τι κεφάλαιο διακινδυνεύει (VaR) επενδυτής αγοράζοντας μια μετοχή S για 3 χρόνια με βεβαιότητα 99%;

(β) (2 βαθμοί) Αν ο επενδυτής επιλέξει αντί της μετοχής να πάρει το τριετές δικαίωμα, ποια είναι η ελάχιστη τιμή της μετοχής στη λήξη που θα δώσει κέρδος μεγαλύτερο από το διακινδυνευόμενο κεφάλαιο του προηγούμενου ερωτήματος;

(γ) (4 βαθμοί) Αν η επενδυτική επιλογή είναι το τριετές δικαίωμα, ποια είναι η πιθανότητα ο επενδυτής να έχει μεγαλύτερο κέρδος από το διακινδυνευόμενο κεφάλαιο;

Δίνονται : N(0,000694) = 0,500277 , N(0,520309) = 0,698576 , N(0,86447) = 0,806340 , N(-2,32635) = 0,01.