

Όνομα:	Επίθετο:		
Ημερομηνία: 5/7/2023	Πρωί:	Απόγευμα:	X
Θεματική ενότητα: Αναλογιστικά Πρότυπα Συμβάντων Ζωής και Θανάτου (Αγ)			

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

A. Έστω ${}_kL$ τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την παρούσα αξία της ζημιάς/κέρδους του ασφαλιστή τη χρονική στιγμή k για μια ισόβια διακριτή ασφάλιση ζωής ασφαλισμένου κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας για άτομο ηλικίας x .

Δίνονται: $A_x = 0,125$, $A_{x+n} = 0,400$, ${}^2A_{x+n} = 0,200$, $d = 0,05$ και $\Pr(N(0,1) > 1,645) = 0,05$.

i. Να δοθεί η αναλυτική μορφή και να υπολογισθεί η μέση τιμή $E({}_nL_x)$.

(1 μονάδα)

ii. Να δοθεί η αναλυτική μορφή και να υπολογισθεί η διασπορά $\text{Var}({}_nL_x)$.

(1 μονάδα)

iii. Ποιο το συνολικό κεφάλαιο – απόθεμα τη στιγμή n για 100 συμβόλαια τέτοιου τύπου;

(1 μονάδα)

B. Έστω ότι ασφαλιστής κατέχει στο χαρτοφυλάκιο του 100 συμβόλαια όμοια με το παραπάνω συμβόλαιο τη χρονική στιγμή n . Υποθέτουμε ότι τα συμβόλαια είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η συνολική ζημιά/κέρδος είναι κανονικά κατανομημένη, να απαντηθούν τα παρακάτω:

i. Να υπολογισθεί το συνολικό κεφάλαιο που θα πρέπει να έχει ο ασφαλιστής τη χρονική στιγμή n έτσι ώστε η πιθανότητα εκπλήρωσης της υποχρέωσης του για αυτά τα συμβόλαια να είναι 95%.

(3 μονάδες)

ii. Σύμφωνα με τους όρους του συμβολαίου ο ασφαλιστής έχει τη δυνατότητα να μεταβάλλει το ασφάλιστρο τη χρονική στιγμή n . Να υπολογισθεί το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο που πρέπει να απαιτήσει ο ασφαλιστής τη χρονική στιγμή n από κάθε συμβόλαιο ώστε στο σύνολο τους να ισούται με το κεφάλαιο – απόθεμα που υπολογίσθηκε στο ερώτημα a. iii. με πιθανότητα εκπλήρωσης της υποχρέωσης του ίση με 95%.

(4 μονάδες)

Θέμα 2

Α. Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας θνησιμότητας:

x	l_x
50	10.000
51	9.966
52	9.929
53	9.888
54	9.843
55	9.795
56	9.742
57	9.685
58	9.622
59	9.553
60	9.478
61	9.395
62	9.304
63	9.205
64	9.097
65	8.980

Για τους υπολογισμούς να χρησιμοποιηθεί τεχνικό επιτόκιο (TIR) 4%.

- i. Να υπολογισθεί για ασφαλισμένο άτομο ηλικίας 55 ετών το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο (ΕΝ.Κ.Α) ασφάλισης θανάτου, διάρκειας τεσσάρων ετών, αυξανόμενου ετησίως κεφαλαίου πληρωτέου στο τέλος του έτους θανάτου του ασφαλισμένου και ασφάλισης επιβίωσης, διάρκειας τεσσάρων ετών, παροχής τεσσάρων νομοματικών μονάδων πληρωτέων στο τέλος της περιόδου των τεσσάρων ετών σε περίπτωση επιβίωσης του ασφαλισμένου.

(1 μονάδα)
- ii. Να υπολογισθεί για ασφαλισμένο άτομο ηλικίας 55 ετών το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο (ΕΝ.Κ.Α) ασφάλισης θανάτου, διάρκειας τεσσάρων ετών, αυξανόμενου συνεχώς κεφαλαίου με καταβολή του ασφαλισματος άμεσα κατά τη χρονική στιγμή θανάτου του ασφαλισμένου. Να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση της ομοιόμορφης κατανομής θανάτων (UDD).

(2 μονάδες)
- iii. Να υπολογισθεί το περιοδικό καθαρό ασφάλιστρο του ασφαλιστικού σχήματος του ερωτήματος 1.b., όπου η πληρωμή των ασφαλιστρών γίνεται στην αρχή κάθε εξαμήνου με διάρκεια πληρωμής ασφαλιστρών ίση με τη διάρκεια της ασφαλιστικής κάλυψης (τέσσερα έτη). Να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση της ομοιόμορφης κατανομής θανάτων (UDD).

(3 μονάδες)

Β. Έστω διακριτή ισόβια ασφάλιση ζωής ασφαλισμένου κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας για άτομο ηλικία 50 ετών.

- i. Εάν η πιθανότητα θανάτου στην ηλικία των 60 ετών διπλασιαστεί και οι πιθανότητες θανάτου για τις υπόλοιπες ηλικίες παραμένουν αμετάβλητες, να βρεθεί η αύξηση του ενιαίου καθαρού ασφαλιστρού.

(2 μονάδες)

- ii. Υποθέτοντας ότι οι πιθανότητες θανάτου βασίζονται στο νόμο θνησιμότητας De Moivre όπου η οριακή ηλικία ω είναι ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 61. Να αποδείξετε ότι το ενιαίο καθαρό ασφαλιστρού, μετά την αλλαγή της πιθανότητας θανάτου στην ηλικία 60, είναι:

$$\frac{1}{\omega-50} * \left[a_{\overline{\omega-50}|} + v^{11} - \frac{v^{11} * a_{\overline{\omega-61}|}}{\omega-61} \right]$$

(2 μονάδες)

Θέμα 3

Α. Άτομο ηλικίας x αποφασίζει να ασφαλιστεί για τον κίνδυνο θνησιμότητας που διατρέχει αγοράζοντας την παρακάτω ασφάλιση:

Μια 10 ετών αναβαλλόμενη διακριτή ισόβια ασφάλιση, όπου η παροχή στο θάνατο κατά τη διάρκεια της αναβαλλόμενης περιόδου είναι η επιστροφή των καθαρών ετήσιων ασφαλιστρών συσσωρευμένα με το επιτόκιο που χρησιμοποιήθηκε για να υπολογισθεί το ασφαλιστρο. Η παροχή στο θάνατο μετά την περίοδο αναβολής είναι 10.000€.

Τα ασφαλιστρα πληρώνονται στην αρχή κάθε έτους κατά τη διάρκεια της αναβαλλόμενης περιόδου.

Δίνονται:

- i) Τεχνικό επιτόκιο $i = 3\%$
- ii) ${}_{10}p_x = 0,88$
- iii) $\ddot{a}_{x+10} = 12,6$
- iv) $\ddot{a}_x = 16,7$

Να υπολογιστεί το ετήσιο καθαρό ασφαλιστρο του παραπάνω ασφαλιστικού σχήματος.

(4 μονάδες)

Β. Ο παραπάνω ασφαλισμένος φθάνοντας στην ηλικία των 65 ετών αποφασίζει να αγοράσει μια ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής αναβαλλόμενη για 20 έτη, η οποία πληρώνει 25.000€ κάθε έξι μήνες με έναρξη καταβολών στην ηλικία των 85 ετών, ώστε να καλύψει τον κίνδυνο της μακροβιότητας που διατρέχει. Το σταθερό μηνιαίο ασφαλιστρο πληρώνεται για 10 έτη με έναρξη στην ηλικία των 65 ετών.

Υπό την υπόθεση της γραμμικότητας, ως προς s , της συνάρτησης $v^s {}_s p_x$, $s \in (0,1)$, να υπολογισθεί το καθαρό μηνιαίο ασφαλιστρο.

Δίνονται τα παρακάτω:

- i) Τεχνικό επιτόκιο $i = 5\%$
- ii) $\ddot{a}_{65:20|} = 11,8748$
- iii) ${}_{10}E_{65} = 0,55305$
- iv) ${}_{10}E_{75} = 0,45302$
- v) $\ddot{a}_{75:10|} = 4,20908$
- vi) $\ddot{a}_{75} = 7,2893$.

(3 μονάδες)

Γ. Επιπρόσθετα ο ασφαλισμένος λαμβάνει ένα δάνειο από τράπεζα και αγοράζει μια ασφάλεια μειούμενου κεφαλαίου στην ηλικία των 70 ετών με διάρκεια 2 έτη, ώστε να καλύψει τον κίνδυνο θνησιμότητας για την καταβολή των μελλοντικών δόσεων, αλλά και παροχή στη λήξη της ασφάλισης του ασφαλισμένου κεφαλαίου όπως αυτό έχει διαμορφωθεί στο τελευταίο έτος της ασφάλισης.

Η ένταση θνησιμότητας είναι $\mu_x = \frac{1}{3(80-x)}$ και το τεχνικό επιτόκιο $i = 2\%$.

Να υπολογισθεί η $(DA)_{70:\overline{2}|}$ για αρχικό ασφαλισμένο κεφάλαιο 300€, όπου στο δεύτερο έτος έχει διαμορφωθεί στα 200€.

(3 μονάδες)

Θέμα 4

PRODUCT

TYPE OF INSURANCE: Ράντα καταβαλλόμενη σε συνεχή χρόνο.

BENEFIT: €10.000/έτος.

DURATION OF INSURANCE: Ισόβια.

DEFERRAL PERIOD: Έως την ηλικία 65.

PREMIUMS: Καταβαλλόμενα σε συνεχή χρόνο, καθ' όλη τη διάρκεια της περιόδου αναβολής της ράντας (deferral period).

DEATH BENEFIT: Τα συσσωρευμένα ασφάλιστρα, ανατοκισμένα με το ίδιο επιτόκιο που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των ασφαλίσεων, καταβλητέα κατά τη χρονική στιγμή θανάτου του ασφαλισμένου. Η παροχή «θανάτου» ισχύει μόνο κατά την περίοδο αναβολής της ράντας.

WITHDRAWAL BENEFIT: Ίδιο με την παροχή λόγω «θανάτου» (death benefit). Η παροχή λόγω «απόσυρσης» από το ασφαλιστήριο συμβόλαιο (withdrawal benefit) ισχύει μόνο κατά την περίοδο αναβολής της ράντας.

TECHNICAL BASIS

DECREMENTS: Death & Withdrawal.

FORCE OF INTEREST: 3%.

FORCE OF MORTALITY: $\mu_x^{(d)} = 0,001, \forall x$.

FORCE OF WITHDRAWAL: $\mu_x^{(w)} = 0,18, \forall x$.

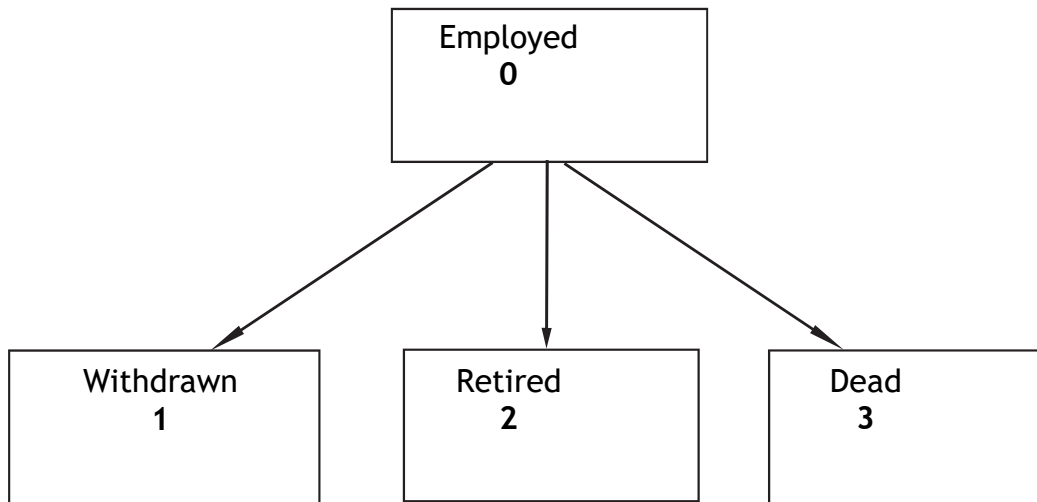
AGE AT ISSUE: 45

Να υπολογιστεί το Ετήσιο Καθαρό Ασφάλιστρο (Level Benefit Premium).

(10 μονάδες)

Θέμα 5

Οι αποχωρήσεις από την εργασία περιγράφονται με τη χρήση του παρακάτω three-decrement model:



Οι εντάσεις μετάβασης έχουν ως εξής:

$$\mu_x^{01} = \begin{cases} 0,05, & x < 60 \\ 0,00, & x \geq 60 \end{cases}$$

$$\mu_x^{02} = \begin{cases} 0,00, & x < 60 \\ 0,10, & 60 < x < 62 \end{cases}$$

$$\mu_x^{03} = \begin{cases} 0,003, & 59 \leq x < 60 \\ 0,004, & 60 \leq x < 61 \\ 0,005, & 61 \leq x < 62 \end{cases}$$

Επιπλέον των αποχωρήσεων σε συνεχή χρόνο που περιγράφονται από τις ανωτέρω εντάσεις μετάβασης, 20% των εργαζόμενων αποχωρούν ακριβώς στην ηλικία 60 λόγω συνταξιοδότησης (retirement), ενώ στην ηλικία 62 αποχωρούν λόγω συνταξιοδότησης υποχρεωτικά όλοι οι εναπομείναντες εργαζόμενοι.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

A) Να κατασκευάσετε τον three-decrement table για το ανωτέρω μοντέλο, για τις ακέραιες ηλικίες 59-62, χρησιμοποιώντας ως πληθυσμό βάσης $l_{59} = 10^5$.

(6 μονάδες)

Β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένας εργαζόμενος (59) να συνταξιοδοτηθεί πριν από την ηλικία 62.

(1 μονάδα)

Γ) Να υπολογίσετε το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο παροχής ύψους 10^5 , άμεσα καταβλητέας σε περίπτωση θανάτου ενός εργαζόμενου (59) με χρήση:

- i. ακριβή υπολογισμού (ολοκληρώματα) και
- ii. του three-decrement table του ερωτήματος Α, υποθέτοντας ότι οι αποζημιώσεις καταβάλλονται στο μέσο των ατέραιων ηλικιακών διαστημάτων.

(2 μονάδες)

Δ) Να υπολογίσετε το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο εφάπαξ παροχής ύψους 10^5 , άμεσα καταβλητέας σε περίπτωση συνταξιοδότησης ενός εργαζόμενου (59), υποθέτοντας ότι οι αποζημιώσεις καταβάλλονται στο μέσο των ατέραιων ηλικιακών διαστημάτων.

(1 μονάδα)

Το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης είναι 4%.